Б. П. Эрдниев[1], В. А. Сидоренко[2], Н. В. Сидоренко[3]
[1] ФГБОУ ВО «Калмыцкий Государственный Университет им. Б.Б. Городовикова»
[2] ФГБОУ ВО «Калмыцкий Государственный Университет им. Б.Б. Городовикова»
[3] МБОУ «Элистинская многопрофильная гимназия»

УДК 511

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Статья будет интересна для старшеклассников в учебно-исследовательских целях в математике.

Последовательность простых чисел можно представить в виде таблицы из восьми столбцов с периодом 24 между рядами. И тогда обнаруживаются общие свойства чисел в группах-столбцах, как в Таблице химических элементов Д.И. Менделеева. Причём существует устойчивая связь между числами и геометрией.

Ключевые слова: периодическая таблица; период 24, простые числа, Эратосфен.

B. P. Erdniev[1], V. A. Sidorenko[2], N. V. Sidorenko[3]
Kalmyk State University

PERIODIC TABLE OF PRIME NUMBERS

The article will be interesting for high school students for educational purposes in mathematics.

A sequence of primes can be represented as a table of eight columns with a period of 24 between rows. And then the general properties of numbers are found in column groups, as in the Table of Chemical Elements of D.I. Mendeleev. Moreover, there is a stable relationship between numbers and geometry.

Keywords: prime number, primes, periodic table, period 24, Eratosthenes.

Простое число – натуральное (целое положительное) число, имеющее ровно два различных натуральных делителя – единицу и самого себя. То есть, единица сюда не относится – это особое число в математике.

Как получить ряд простых чисел? В данной задаче использовали метод, называемый «Решетом Эратосфена». Эратосфен Киренский – греческий учёный, живший в III веке до нашей эры. Это был математик, астроном, географ, филолог и поэт. Греки называли простые числа линейными, а составные – прямоугольными. Суть его метода в следующем. Например, требуется найти ряд простых в первой тысяче натуральных чисел. Начинаем с 2. Вычёркиваем из этого ряда все числа, которые делятся на 2. Следующее число берём 3 и вычёркиваем все, делящиеся на 3. Далее берём следующее из оставшихся – это 5. Повторяем операцию с этим числом и переходим к следующему из оставшихся – это 7. И так далее. Говорят, что Эратосфен это делал, прокалывая числа на бумаге, а не вычёркивая. Поэтому и получалось у него решето-матрица.

Идея профессора Калмыцкого университета Эрдниева Батыра Пюрвеевича заключается в том, чтобы разместить эти числа в таблице из 8 столбцов таким образом, чтобы ряды таблицы отличались на период, равный 24. То есть, разница в одном столбце между числами кратна 24. И тогда оказывается, что числа в одной группе (столбце) обладают некоторыми одинаковыми свойствами. Числа 2 и 3 не входят в эту таблицу – она начинается с 5. И здесь важно было выбрать, с какого числа начинать вторую строку. Если первая строка начинается с 5, то вторая при периоде 24 соответственно начинается с 29.

Но прежде рассмотрим аддитивные свойства простых чисел. Так, например, каждое простое число, которое при делении на 4 даёт остаток 1, может быть представлено (разложено) в виде квадратов двух натуральных чисел, причём единственным образом. Например: $5 = 1^2 + 2^2$; $13 = 2^2 + 3^2$, и т.д. Остальные числа могут быть разложены на 3 или 4 квадрата. Если для первых рядов таблицы ещё можно вручную (и с помощью калькулятора) подобрать эти комбинации, то для больших чисел потребуются уже компьютерные расчёты. Для этого была составлена компьютерная программа, которая может получить любой ряд простых до 4 млрд и помогает исследовать указанные и другие свойства простых чисел. Таким образом, было подтверждено, что каждая группа таблицы Эрдниева Б.П. действительно имеет свои определённые свойства. Представим эти свойства в виде таблицы 1:

Таблица 1

Групповые свойства (разложения на квадраты) простых чисел

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
5	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	/25/
$m^2 + n^2$			$m^2 + n^2$	$m^2 + n^2$			$m^2 + n^2$
	$m^2 + 3n^2$		$m^2 + 3n^2$		$m^2 + 3n^2$		$m^2 + 3n^2$
		$m^2 + 2n^2$		$m^2 + 2n^2$	$m^2 + 2n^2$		$m^2 + 2n^2$
						$m^2 + n^2 + 2k^2$	

Замечание. В нашей Периодической таблице эти разложения представлены в виде чисел m, n, k – без квадратов, но в квадратных скобках. Например, для 5 имеем [1,2], для 7 – [2,1,1,1], и т.д. (см. табл. 2).

Пауль Ферма (сын Пьера Ферма) в 1669 году показал аналогичные свойства для трёх групп простых чисел: 1) вида $p = (8k+1) \Rightarrow p = m^2 + 2n^2$; 2) вида $p = (3k+1) \Rightarrow p = m^2 + 3n^2$; 3) вида $p = (8k+3) \Rightarrow p = m^2 + 2n^2$. Мы здесь расширили эти группы свойств до $p = (3k+2)$, $p = (4k+1)$, $p = (4k+3)$. Так для 7-го столбца получаем новое разложение: $m^2 + n^2 + 2k^2$.

Перебор разложений даёт много комбинаций, особенно для больших чисел (уже после 3 – 4 ряда). То есть, комбинации $(m^2 + n^2 + 2k^2)$ встречаются практически везде, а также $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Но последняя менее интересна, и для простых чисел мы её не рассматриваем. Главное, что те свойства, которые представлены в данной таблице, мы можем подтвердить на практике.

Таблица 2

Разложения для первых 5 рядов

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
5 [1,2]	**7** [2,1,1,1]	**11** [3,1,1]	**13** [2,3] [1,2,2,2]	**17** [1,4] [3,2,2]	**19** [1,3,3] [4,1,1,1]	**23** [3,3,2,1]	25
29 [2,5]	**31** [2,3,3,3]		**37** [1,6] [5,2,2,2]	**41** [4,5] [3,4,4]	**43** [5,3,3] [4,3,3,3]	**47** [3,3,5,2]	49
53 [2,7]		**59** [3,5,5]	**61** [5,6] [7,2,2,2]		**67** [7,3,3] [8,1,1,1]	**71** [3,3,7,2]	**73** [3,8] [1,6,6] [5,4,4,4]
	79 [2,5,5,5]	**83** [9,1,1]		**89** [5,8] [9,2,2]			**97** [4,9] [5,6,6] [7,4,4,4]
101 [1,10]	**103** [10,1,1,1]	**107** [3,7,7]	**109** [3,10] [1,6,6,6]	**113** [7,8] [9,4,4]			121

Комбинации этих чисел (разложений) можно связать с геометрическими фигурами. Например, четвёрки чисел можно представить в виде трапеций со сторонами m, n, n, n или m, n, k, k. При этом во втором случае иногда получаются равнобокие трапеции с углами по 60° в нижнем основании и 120° – в верхнем. Для других случаев связь чисел с фигурами не так очевидна. Но они всё же есть, и мы остановимся на них.

Рассмотрим для числа C разложение $(m^2 + n^2)$, например, в первом столбце. Его в Китае и Вавилоне называли законом прямоугольного треугольника. Если взять

$a = 2mn, \quad b = m^2 – n^2 \quad (m > n)$, то получим:

$c^2 = a^2 + b^2$ – то есть, Пифагорову тройку, или треугольник, в котором вписанная окружность имеет радиус:

$r = n(m–n)$.

Например, для числа 5 (с членами разложения 1 и 2) получаем тройку $\Delta\{4;3;5\}$, $r =1$. Это известный треугольник Пифагора, радиус вписанной в него окружности равен 1. Именно в таком виде в Периодической таблице и приводятся параметры треугольников.

Другой случай. Для чисел с разложением $c = m^2 + 3n^2$ можно тоже сопоставить треугольник, и это будет дополнительное свойство для такой группы, так как параметры m и n здесь не участвуют, а вводятся новые параметры j и k, для которых выполняется разложение числа $c = j^2 + k^2 + jk$. И оказывается, для этой группы можно подобрать эти параметры. Тогда, приняв

$$a = 2jk + k^2; \quad b = j^2 – k^2 \quad (j > k),$$

получим треугольник со сторонами a, b, c и тупым углом в 120°. Пример для числа 31: $j = 5$, $k = 1$, треугольник $\Delta\{11; 24; 31\}$. В Периодической таблице величины j и k обозначаем в виде |j, k+|, т.е. в данном случае это |5, 1+|.

Третий случай. Для чисел с разложением $c = m^2 + 2n^2$ можно построить прямоугольный параллелепипед $\Pi\{c; h \times a \times a\}$ (эту фигуру решили обозначать так), где c – главная диагональ, h – высота, a – сторона квадратного основания.

$h = |2n^2 – m^2|, \qquad a = 2mn.$

При этом для главной диагонали выполняется условие: $c^2 = 2a^2 + h^2$

Пример для числа 11: m=3, n=1; $\Pi\{11; 7 \times 6 \times 6\}$ (см. табл. 3).

Таблица 3

Примеры связи чисел с геометрическими фигурами для чисел первой строки

5	[1,2] Δ{4;3;5} r 1 *L*(90°; 53°08'; 36°52')
7	[2,1,1,1] |2,1,+| Δ{7;5;3} *L*(120°; 21°47'; 38°13')
11	[3,1,1] П{11;7x6x6}
13	[2,3] Δ{12;5;13} r 2 *L*(90°; 67°23'; 22°37') [1,2,2,2] |3,1,+| Δ{13;8;7} *L*(120°; 27°48'; 32°12')
17	[1,4] Δ{8;15;17} r 3 *L*(90°; 28°04'; 61°56') [3,2,2] П{17;1x12x12}
19	[1,3,3] П{19;17x6x6} [4,1,1,1] |3,2,+| Δ{19;16;5} *L*(120°; 13°10'; 46°50')
23	[3,3,2,1]

Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Методика и технология УДЕ в 21 веке», посвящённой 100-летию со дня рождения академика РАО Эрдниева П.М. 15 октября 2021 г., стр. 135

Элиста, 2021